3

Triángulos congruentes

3.1 TRIÁNGULOS CONGRUENTES

Figuras congruentes son figuras que tienen el mismo tamaño y forma; una es el duplicado exacto de la otra. Las figuras pueden hacerse coincidir de tal forma que sus partes correspondientes ajustan entre sí. Dos círculos que tengan el mismo radio son círculos congruentes.

Triángulos congruentes son triángulos que tienen el mismo tamaño y la misma forma.

Si dos triángulos son congruentes, sus lados y ángulos correspondientes deben ser congruentes. Así los triángulos congruentes ABC y $A'B'C'$ en la figura 3-1 tienen lados ($AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ y $AC \cong A'C'$) y ángulos correspondientes congruentes ($\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$).

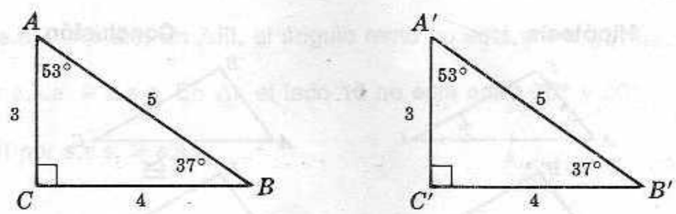


Fig. 3-1

($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ se lee como "Triángulo ABC es congruente con triángulo A-prima, B-prima, C-prima.")

Nótese cómo pueden localizarse las partes iguales correspondientes en triángulos congruentes. Lados correspondientes aparecen opuestos a ángulos congruentes y ángulos correspondientes aparecen opuestos a lados congruentes.

3.1A Principios básicos de triángulos congruentes

PRINCIPIO 1: *Si dos triángulos son congruentes, entonces sus partes correspondientes son congruentes.* (Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.)

Por lo tanto, si $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ en la figura 3-2, entonces $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $a \cong a'$, $b \cong b'$ y $c \cong c'$.

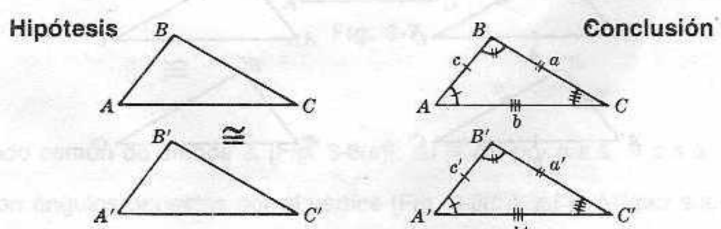


Fig. 3-2

Métodos para demostrar la congruencia de triángulos

LAL

PRINCIPIO 2: (s.a.s. $\cong$ s.a.s) *Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro, entonces los triángulos son congruentes.*

Por eso, si $b \cong b'$, $c \cong c'$ y $\angle A \cong \angle A'$ en la figura 3-3 entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

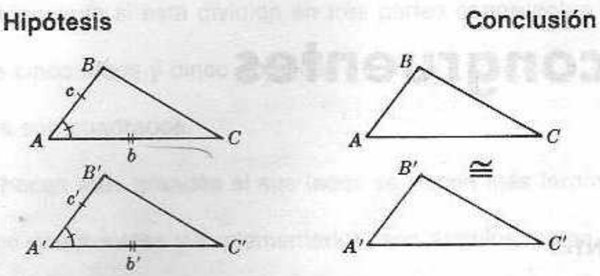


Fig. 3-3

ALA

PRINCIPIO 3: (a.s.a. $\cong$ a.s.a.) *Si un lado y los dos ángulos adyacentes de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro, entonces los triángulos son congruentes.*

Dado lo cual, si $\angle A \cong \angle A'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $b \cong b'$ en la figura 3-4, entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

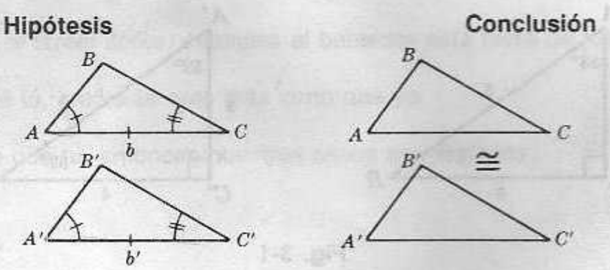


Fig. 3-4

LLL

PRINCIPIO 4: (s.s.s. $\cong$ s.s.s.) *Si los tres lados de un triángulo, son congruentes con los tres lados de otro, entonces los triángulos son congruentes.*

Por consiguiente, si $a \cong a'$, $b \cong b'$ y $c \cong c'$ en la figura 3-5, entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

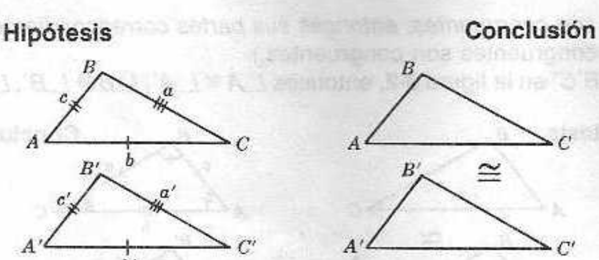


Fig. 3-5

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1 SELECCIÓN DE TRIÁNGULOS CONGRUENTES

De cada uno de los grupos de tres triángulos en la figura 3-6, seleccione los triángulos congruentes e identifique el principio de congruencia involucrado.

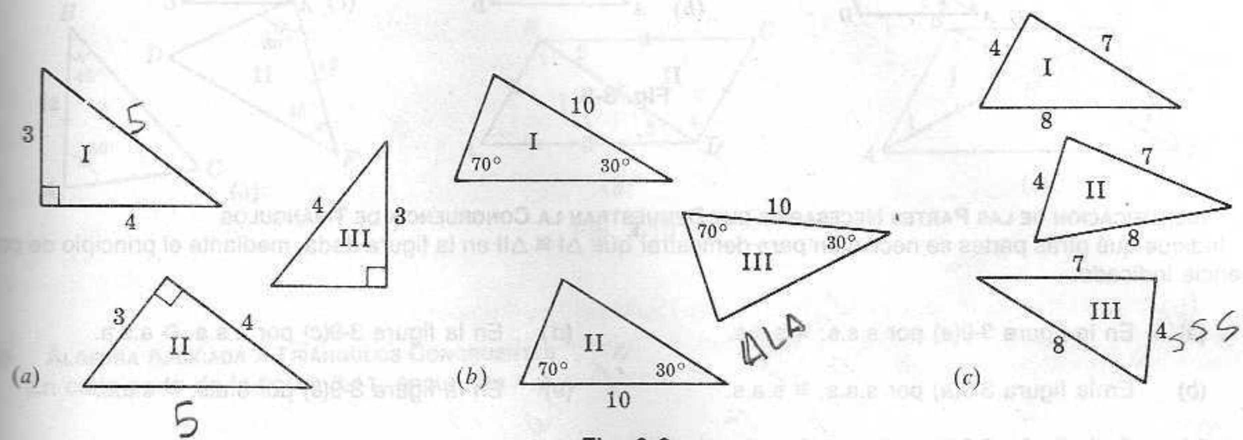


Fig. 3-6

Soluciones

(*a*) ΔI ≅ ΔII, por s.a.s. ≅ s.a.s. En ΔIII, el ángulo recto no está entre 3 y 4.

(*b*) ΔII ≅ ΔIII, por a.s.a. ≅ a.s.a. En ΔI, el lado 10 no está entre 70° y 30°.

(*c*) ΔI ≅ ΔII ≅ ΔIII por s.s.s. ≅ s.s.s.

3.2 DETERMINACIÓN DE LA RAZÓN DE CONGRUENCIA PARA TRIÁNGULOS

En cada parte de la figura 3-7, puede probarse la congruencia de ΔI con ΔII. Elabore un diagrama donde se indiquen las partes comunes a los triángulos e indique el principio de congruencia aplicado.

(*a*) **Dados:** ∠1 ≅ ∠4, ∠2 ≅ ∠3
Demuéstrese: ΔI ≅ ΔII

(*b*) **Dados:** $\overline{BE} \cong \overline{EC}$, $\overline{AE} \cong \overline{ED}$
Demuéstrese: ΔI ≅ ΔII

(*c*) **Dados:** Δ*ABC* Isósceles, Δ*ADC* Isósceles, $\overline{AC}$ como base
Demuéstrese: ΔI ≅ ΔII

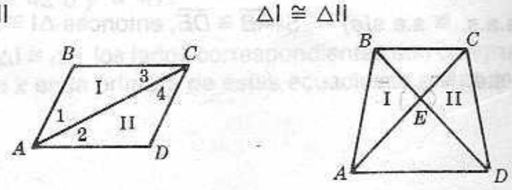
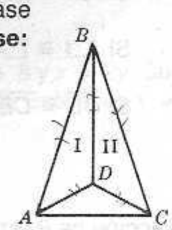



Fig. 3-7

Soluciones

(*a*) *AC* es un lado común de ambos ≜ [Fig. 3-8(*a*)]. ΔI ≅ ΔII por a.s.a. ≅ a.s.a.

(*b*) ∠1 y ∠2 son ángulos opuestos por el vértice [Fig. 3-8(*b*)]. ΔI ≅ ΔII por s.a.s. ≅ s.a.s.

(*c*) *BD* es un lado común de ambos ≜ [Fig. 3-8(*c*)]. ΔI ≅ ΔIII por s.s.s. ≅ s.s.s.

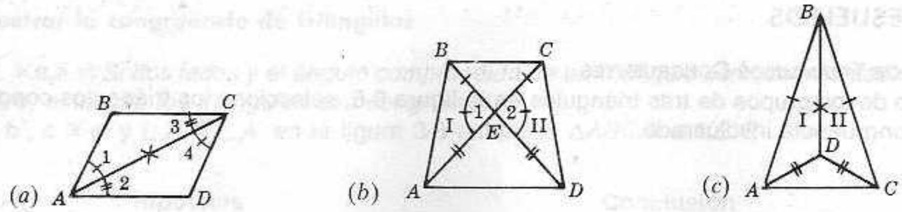


Fig. 3-8

3.3 IDENTIFICACIÓN DE LAS PARTES NECESARIAS QUE DEMUESTRAN LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Indique qué otras partes se necesitan para demostrar que $\triangle I \cong \triangle II$ en la figura dada, mediante el principio de congruencia indicado.

(*a*) En la figura 3-9(*a*) por s.s.s. ≅ s.s.s.

(*b*) En la figura 3-9(*a*) por s.a.s. ≅ s.a.s.

(*c*) En la figura 3-9(*b*) por a.s.a. ≅ a.s.a.

(*d*) En la figura 3-9(*c*) por a.s.a. ≅ a.s.a.

(*e*) En la figura 3-9(*c*) por s.a.s. ≅ s.a.s.

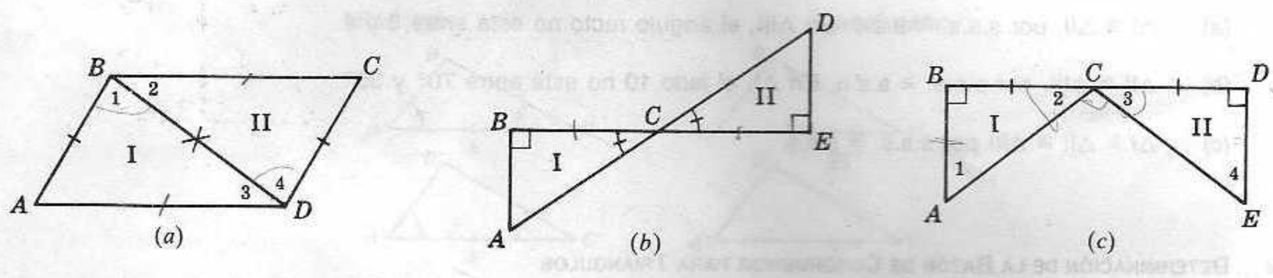


Fig. 3-9

Soluciones

(*a*) Si $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por s.s.s. ≅ s.s.s.

(*b*) Si $\angle 1 \cong \angle 4$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por s.a.s. ≅ s.a.s.

(*c*) Si $\overline{BC} \cong \overline{CE}$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por a.s.a. ≅ a.s.a.

(*d*) Si $\angle 2 \cong \angle 3$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por a.s.a. ≅ a.s.a.

(*e*) Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por s.a.s. ≅ s.a.s.

3.4 SELECCIÓN DE PARTES CORRESPONDIENTES EN TRIÁNGULOS CONGRUENTES

En cada parte de la figura 3-10, están marcadas las partes comunes que se necesitan para demostrar $\triangle I \cong \triangle II$. Lístense de las partes restantes las que son congruentes.

Soluciones

Los lados congruentes correspondientes están opuestos a los ángulos congruentes. Los ángulos congruentes correspondientes son opuestos a lados congruentes.

(*a*) Opuestos a 45°, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$. Opuestos a 80°, $\overline{BC} \cong \overline{DF}$. Opuestos al lado 12; $\angle C \cong \angle D$.

(*b*) Opuestos a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\angle 3 \cong \angle 2$. Opuestos a $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, $\angle 1 \cong \angle 4$. Opuestos al lado común $\overline{BD}$, $\angle A \cong \angle C$.

(*c*) Opuestos a $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$, $\angle 2 \cong \angle 3$. Opuestos a $\overline{BE}$ y EC, $\angle 1 \cong \angle 4$. Opuestos a $\angle 5$ y $\angle 6$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

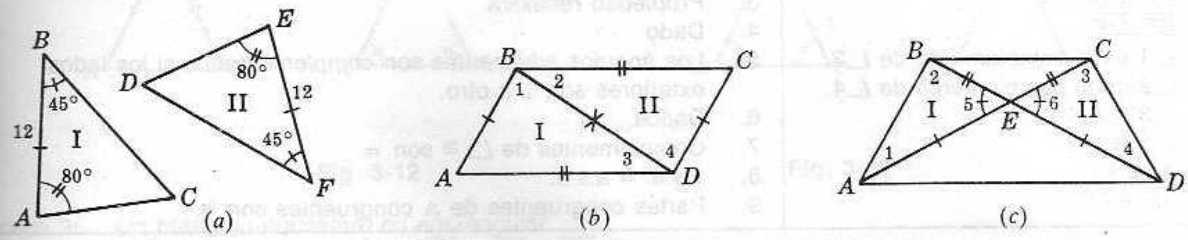


Fig. 3-10

3.5 Álgebra Aplicada a Triángulos Congruentes

En cada parte de la figura 3-11, encuentre x y y.

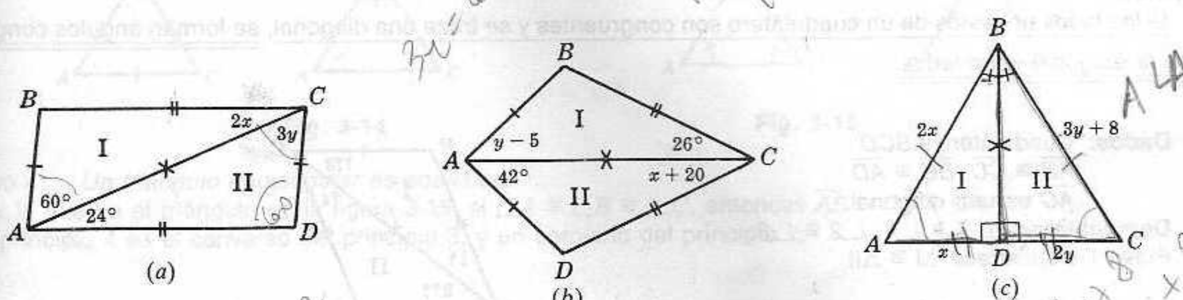


Fig. 3-11

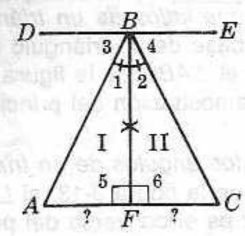
Soluciones

(*a*) Como $\triangle I \cong \triangle II$, los ángulos correspondientes son congruentes. De modo que, $2x = 24$ o $x = 12$ y $3y = 60$ o $y = 20$.

(*b*) Como $\triangle I \cong \triangle II$, los ángulos correspondientes son congruentes. De modo que, $x + 20 = 26$ o $x = 6$ y $y - 5 = 42$ o $y = 47$.

(*c*) Como $\triangle I \cong \triangle II$, los lados correspondientes son congruentes. Entonces $2x = 3y + 8$ y $x = 2y$. Sustituyendo $2y$ para x en la primera de estas ecuaciones, se obtiene $2(2y) = 3y + 8$ o $y = 8$. Entonces $x = 2y = 16$.

3.6 Demostración de Problemas de Congruencia



Dados: $\overline{BF} \perp \overline{DE}$
$\overline{BF} \perp \overline{AC}$
$\angle 3 \cong \angle 4$

Demuéstrese: $\overline{AF} \cong \overline{FC}$

Plan: Demuéstrese $\triangle I \cong \triangle II$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{BF} \perp \overline{AC}$	1. Dados
2. $\angle 5 \cong \angle 6$	2. $\perp$s forman $\angle$s rectos; $\angle$s son $\cong$
3. $\overline{BF} \cong \overline{BF}$	3. Propiedad reflexiva
4. $\overline{BF} \perp \overline{DE}$	4. Dado
5. $\angle 1$ es el complemento de $\angle 3$. $\angle 2$ es el complemento de $\angle 4$.	5. Los ángulos adyacentes son complementarios si los lados exteriores son $\perp$ a otro.
6. $\angle 3 \cong \angle 4$	6. Dados
7. $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Complementos de $\angle$s $\cong$ son =
8. $\triangle I \cong \triangle II$	8. a.s.a. $\cong$ a.s.a.
9. $\overline{AF} \cong \overline{FC}$	9. Partes congruentes de $\triangle$s congruentes son $\cong$.

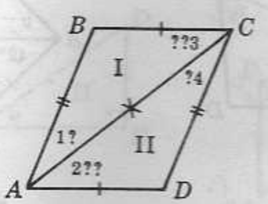
3.7 Demostración de un Problema de Congruencia Expresado en Palabras

Demuestre que si los lados opuestos en un cuadrilátero son iguales, y se traza una diagonal; se forman ángulos iguales entre la diagonal y los lados.

Solución

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y se traza una diagonal, se forman ángulos congruentes entre la diagonal y los lados.

Dados: Cuadrilátero $ABCD$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
$\overline{AC}$ es una diagonal.
Demuéstrese: $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle 3$,
Plan: Demuéstrese $\triangle I \cong \triangle II$



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	1. Dado
2. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	2. Propiedad reflexiva
3. $\triangle I \cong \triangle II$	3. s.s.s. $\cong$ s.s.s.
4. $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle 3$	4. Partes correspondientes de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$

3.2 TRIÁNGULOS ISÓSCELES Y EQUILÁTEROS

3.2A Principios sobre Triángulos Isósceles y Equiláteros

Principio 1: *si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a éstos son congruentes.* (Los ángulos sobre la base de un triángulo isósceles son congruentes).

Así pues, en el $\triangle ABC$ de la figura 3-12, si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces $\angle A \cong \angle C$.

Se da una demostración del principio 1 en el Capítulo 16.

Principio 2: *si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a éstos son congruentes.*

En el $\triangle ABC$ en la figura 3-13, si $\angle A \cong \angle C$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

El principio 2 es el converso del principio 1. Se da la demostración del principio 2 en el capítulo 16.

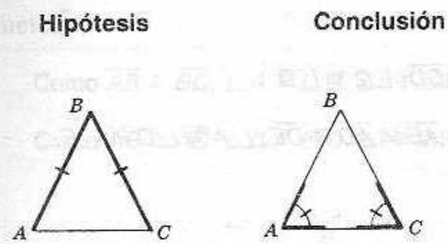


Fig. 3-12

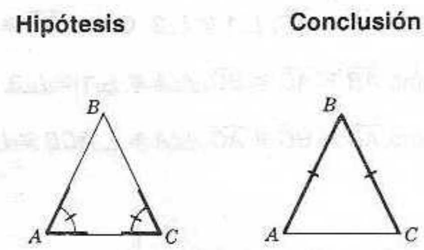


Fig. 3-13

Principio 3: *Un triángulo equilátero es equiangular.*

Así, en el $\triangle ABC$ en la figura 3-14, si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$, entonces $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$.

El principio 3 es un corolario del principio 1. Un *corolario* de un teorema es otro teorema cuya demostración es inmediata del primero.

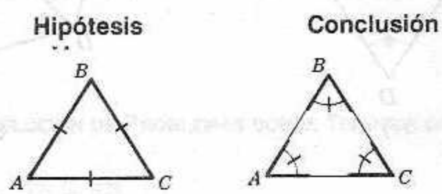


Fig. 3-14

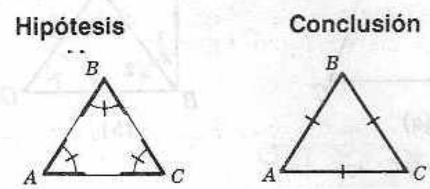


Fig. 3-15

Principio 4: *Un triángulo equiangular es equilátero.*

Por lo que en el triángulo en la figura 3-15, si $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$.

El principio 4 es el converso del principio 3, y un corolario del principio 2.

PROBLEMAS RESUELTOS

3.8 Aplicación de los Principios 1 y 3

En cada inciso de la figura 3-16, identifique los ángulos congruentes que son opuestos a los lados congruentes de un triángulo.

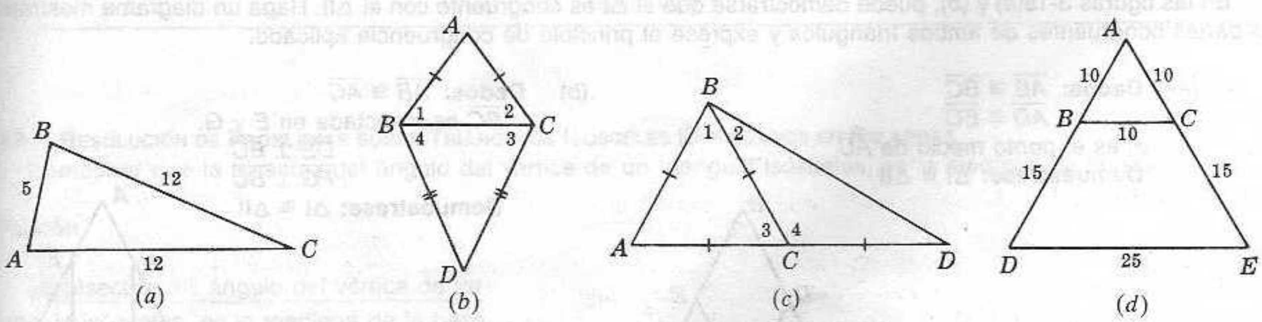


Fig. 3-16

Soluciones

(a) Como $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\angle A \cong \angle B$.

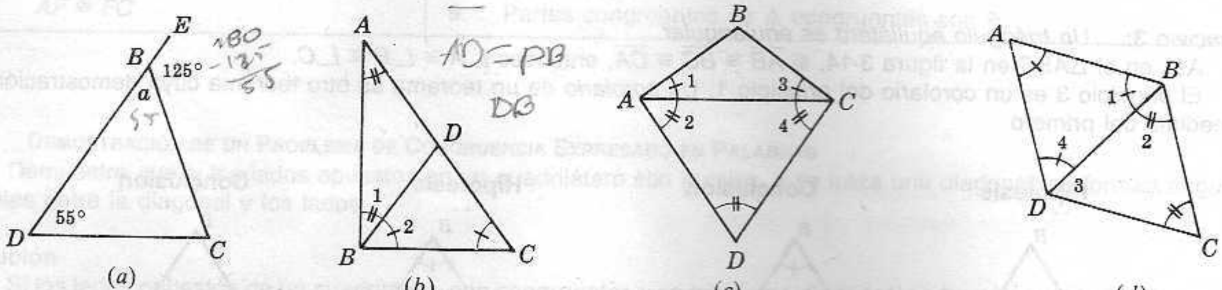
(*b*) Como $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle 1 \cong \angle 2$. Como $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, $\angle 3 \cong \angle 4$.

(*c*) Como $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\angle A \cong \angle 1 \cong \angle 3$. Como $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, $\angle 2 \cong \angle D$.

(*d*) Como $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$, $\angle A \cong \angle ACB \cong \angle ABC$. Como $\overline{AE} \cong \overline{AD} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D \cong \angle E$.

3.9 Aplicación de los Principios 2 y 4

En cada una de las partes de la figura 3-17, identifique los lados congruentes que están opuestos a los ángulos congruentes de un triángulo.



BC ≅ DC

Fig. 3-17

Soluciones

(*a*) Como $m\angle a = 55°$, $\angle a \cong \angle D$. De modo que, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.

(*b*) Como $\angle A \cong \angle 1$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$. Como $\angle 2 \cong \angle C$, $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.

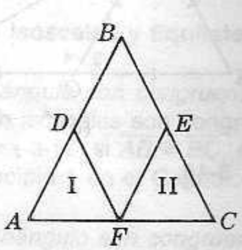
(*c*) Como $\angle 1 \cong \angle 3$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Como $\angle 2 \cong \angle 4 \cong \angle D$, $\overline{CD} \cong \overline{AD} \cong \overline{AC}$.

(*d*) Como $\angle A \cong \angle 1 \cong \angle 4$, $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$. Como $\angle 2 \cong \angle 3$, $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.

3.10 Aplicación de los Principios sobre Triángulos Isósceles

En las figuras 3-18(*a*) y (*b*), puede demostrarse que el $\triangle$I es congruente con el $\triangle$II. Haga un diagrama mostrando las partes congruentes de ambos triángulos y exprese el principio de congruencia aplicado.

(*a*) **Dados:** $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overline{AD} \cong \overline{EC}$
F es el punto medio de $\overline{AC}$
Demuéstrese: $\triangle$I $\cong$ $\triangle$II



(*b*) **Dados:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{BC}$ es trisectada en E y G.
$\overline{DE} \perp \overline{BC}$
$\overline{FG} \perp \overline{BC}$
Demuéstrese: $\triangle$I $\cong$ $\triangle$II

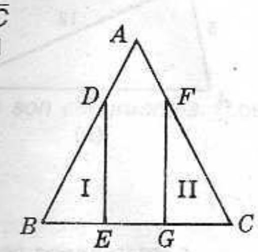


Fig. 3-18

Soluciones

(*a*) Como $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\angle A \cong \angle C$. $\triangle I \cong \triangle II$ por s.a.s. $\cong$ s.a.s. [Fig. 3-19(*a*)].

(*b*) Como $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle B \cong \angle C$. $\triangle I \cong \triangle II$ por a.s.a. $\cong$ a.s.a. [Fig. 3-19(*b*)].

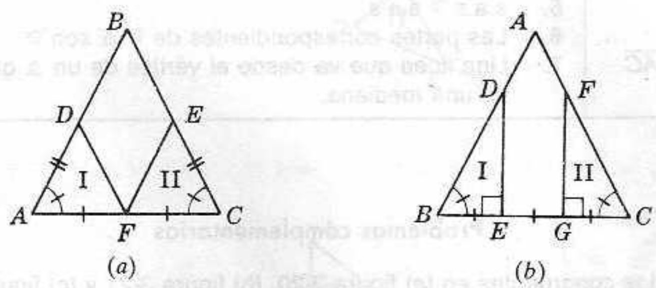


Fig. 3-19

3.11 Resolución de Problemas sobre Triángulos Isósceles

Dados: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overline{AC}$ es trisectado en D y E
Demuéstrese: $\angle 1 \cong \angle 2$
Plan: Demuéstrese $\triangle I \cong \triangle II$ para obtener $\overline{BD} \cong \overline{BE}$.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. AC es trisectado en D y E	1. Dado
2. $\overline{AD} \cong \overline{EC}$	2. Trisectar es dividir en tres partes congruentes
3. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	3. Dado
4. $\angle A \cong \angle C$	4. En un $\triangle$, $\angle$s opuestos a lados $\cong$ son $\cong$.
5. $\triangle I \cong \triangle II$	5. s.a.s. $\cong$ s.a.s.
6. $\overline{BD} \cong \overline{BE}$	6. Partes correspondientes de $\cong$ $\triangle$s son $\cong$.
7. $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Igual que 4.

3.12 Resolución de Problemas sobre Triángulos Isósceles Expresados en Palabras

Demostrar que la bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, es la mediana de la base.

Solución

La bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, es la mediana de la base.

Dados: El $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) isósceles.
$\overline{BD}$ bisecta al $\angle B$
Demuéstrese: $\overline{BD}$ es la mediana a $\overline{AC}$
Plan: Demuéstrese que $\triangle I \cong \triangle II$ para obtener $\overline{AD} \cong \overline{DC}$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	1. Dado
2. $\overline{BD}$ bisecta al $\angle B$	2. Dado
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Bisectar es dividir en dos partes congruentes
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. Propiedad reflexiva
5. $\triangle I \cong \triangle II$	5. s.a.s ≅ s.a.s.
6. $\overline{AD} \cong \overline{DC}$	6. Las partes correspondientes de ≅ ⟁ son ≅.
7. $\overline{BD}$ es la mediana a $\overline{AC}$	7. Una línea que va desde el vértice de un △ que bisecta al lado opuesto, es una mediana.

Problemas complementarios

1. Seleccione los triángulos congruentes en (*a*) figura 3-20, (*b*) figura 3-21 y (*c*) figura 3-22, y exprese el principio de congruencia. (3.1)

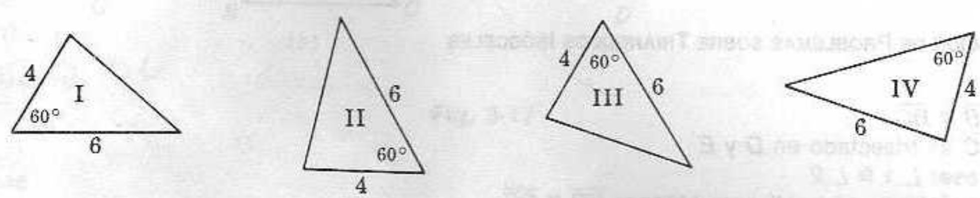


Fig. 3-20

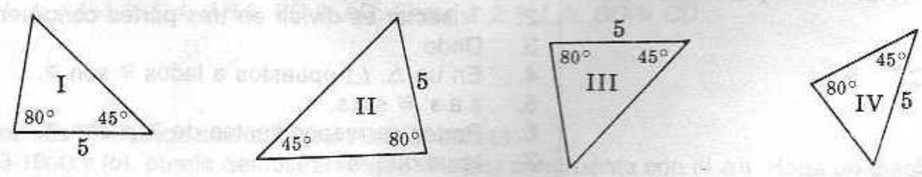


Fig. 3-21

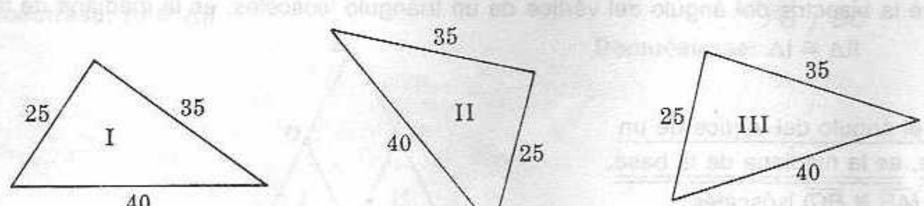
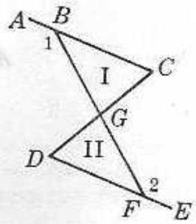


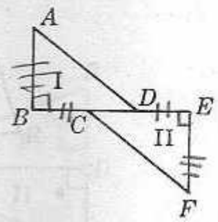
Fig. 3-22

2. En cada una de las siguientes figuras, puede demostrarse que el $\triangle$I es congruente con el $\triangle$II. Exprese el principio de congruencia aplicado. (3.2)

(*a*) **Dados:** $\angle 1 \cong \angle 2$
G es el punto medio de $\overline{BF}$.
Demuéstrese: $\triangle$I $\cong$ $\triangle$II

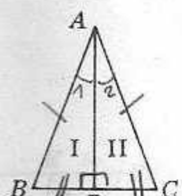


(*b*) **Dados:** $\overline{AB} \perp \overline{BE}$
$\overline{EF} \perp \overline{BE}$
$\overline{BC} \cong \overline{DE}$
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$
Demuéstrese: $\triangle$I $\cong$ $\triangle$II



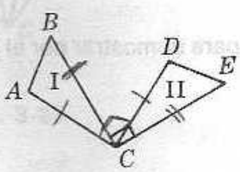
$\overline{DE} = \overline{EB}$
$\overline{BC} \cong \overline{DE}$
$\overline{CD} = \overline{FC}$
$\triangle$I $\cong$ $\triangle$II
LAL $\cong$ LAL

(*c*) **Dados:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
AD es mediana sobre $\overline{BC}$
Demuéstrese: $\triangle$I $\cong$ $\triangle$II

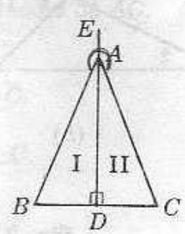


$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
$BD \cong \overline{DC}$
$\measuredangle D = D$
$BC = CB$
$\triangle$I $= \triangle$II

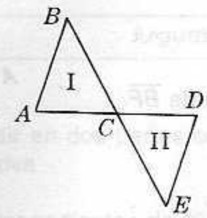
(*d*) **Dados:** $\overline{BC} \perp \overline{CE}$
$\overline{AC} \perp \overline{CD}$
$\overline{AC} \cong \overline{CD}$
$\overline{BC} \cong \overline{CE}$
Demuéstrese: $\triangle$I $\cong$ $\triangle$II



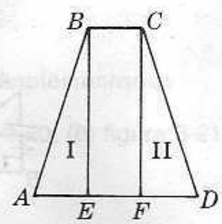
(*e*) **Dados:** $\angle EAB \cong \angle EAC$
$\overline{AD} \perp \overline{BC}$
Demuéstrese: $\triangle$I $\cong$ $\triangle$II



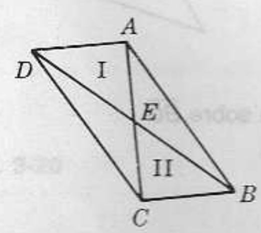
(*f*) **Dados:** $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ bisectores uno del otro.
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$



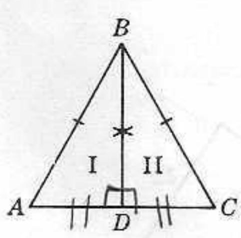
(*g*) **Dados:** $\overline{BE} \perp \overline{AD}$
$\overline{CF} \perp \overline{AD}$
$\overline{BE} \cong \overline{CF}$
$\overline{AD}$ es trisectado.
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$



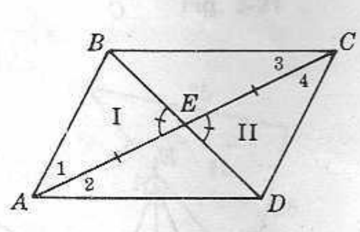
(*h*) **Dados:** $\overline{AD} \perp \overline{AC}$
$\overline{BC} \perp \overline{AC}$
$\overline{BD}$ bisecta a $\overline{AC}$.
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$



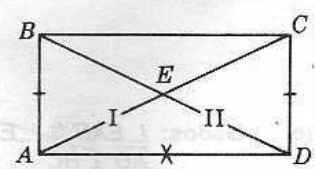
3. Establecer qué más se necesita para demostrar por el principio de congruencia indicado que $\triangle I \cong \triangle II$, en la figura dada. (3.3)



(*a*)



(*b*)



$\triangle I$ es $\triangle ABD$, $\triangle II$ es $\triangle ACD$.
Los triángulos se sobreponen entre sí.

(*c*)

Fig. 3-23

(*a*) En la figura 3-23(*a*) por s.s.s ≅ s.s.s.

(*b*) En la figura 3-23(*a*) por s.a.s. ≅ s.a.s.

(*c*) En la figura 3-23(*b*) por a.s.a. ≅ a.s.a.

(*d*) En la figura 3-23(*b*) por s.a.s. ≅ s.a.s.

(*e*) En la figura 3-23(*c*) por s.s.s. ≅ s.s.s.

(*f*) En la figura 3-23(*c*) por s.a.s. ≅ s.a.s.

4. En cada parte de la figura 3-24, están marcadas las partes que se necesitan para demostrar △I ≅ △II. Identifique las partes restantes que son congruentes. (3.4)

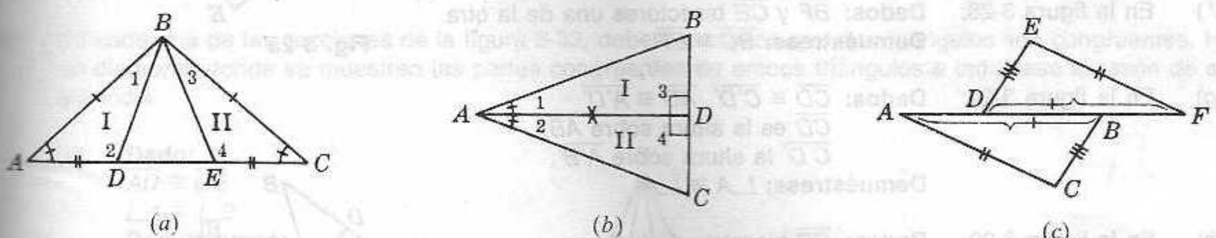


Fig. 3-24

5. En cada figura de la figura 3-25, encuentre *x* y *y*. (3.5)

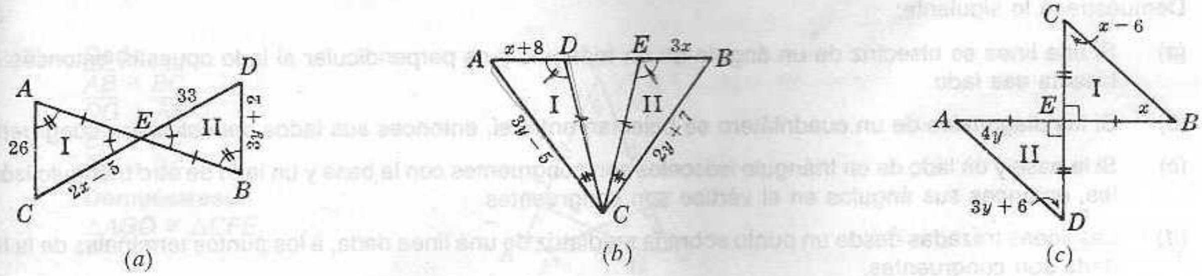


Fig. 3-25

6. Demuéstrese lo que se pide en cada caso. (3.6)

(*a*) En la figura 3-26: **Dados:** $\overline{BD} \perp \overline{AC}$
D es el punto medio de $\overline{AC}$.
Demuéstrese: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

(*b*) En la figura 3-26: $\overline{BD}$ es la altura sobre $\overline{AC}$.
$\overline{BD}$ bisectriz del ∠*B*.
Demuéstrese: ∠*A* ≅ ∠*C*.

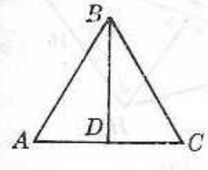


Fig. 3-26

(*c*) En la figura 3-27: **Dados:** $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{BF} \cong \overline{DE}$
$\overline{BF}$ bisectriz del $\angle B$.
$\overline{DE}$ bisectriz del $\angle D$.
$\angle B$ y $\angle D$ son $\angle^s$ rectos
Demuéstrese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

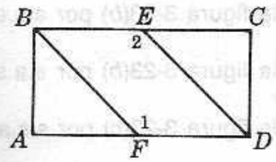


Fig. 3-27

(*d*) En la figura 3-27: **Dados:** $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
E punto medio de $\overline{BC}$.
F punto medio de $\overline{AD}$.
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BF} \cong \overline{DE}$
Demuéstrese: $\angle A \cong \angle C$

(*e*) En la figura 3-28: **Dados:** $\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{CE}$ bisector de $\overline{BF}$
Demuéstrese: $\angle C \cong \angle E$

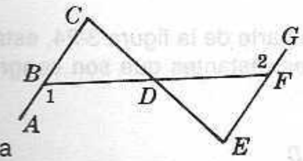


Fig. 3-28

(*f*) En la figura 3-28: **Dados:** $\overline{BF}$ y $\overline{CE}$ bisectores una de la otra
Demuéstrese: $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

(*g*) En la figura 3-29: **Dados:** $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$
$\overline{CD}$ es la altura sobre $\overline{AB}$.
$\overline{C'D'}$ la altura sobre $\overline{A'B'}$.
Demuéstrese: $\angle A \cong \angle A'$

(*h*) En la figura 3-29: **Dados:** $\overline{CD}$ bisectriz de $\angle C$.
$\overline{C'D'}$ bisectriz de $\angle C'$.
$\angle C \cong \angle C'$,
$\angle B \cong \angle B \cong \angle B'$,
$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.
Demuéstrese: $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$

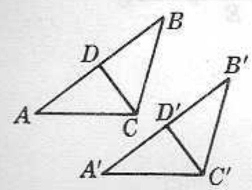


Fig. 3-29

7. Demuéstrese lo siguiente: (3.7)

(*a*) Si una línea es bisectriz de un ángulo de un triángulo y es perpendicular al lado opuesto, entonces ésta bisecta ese lado.

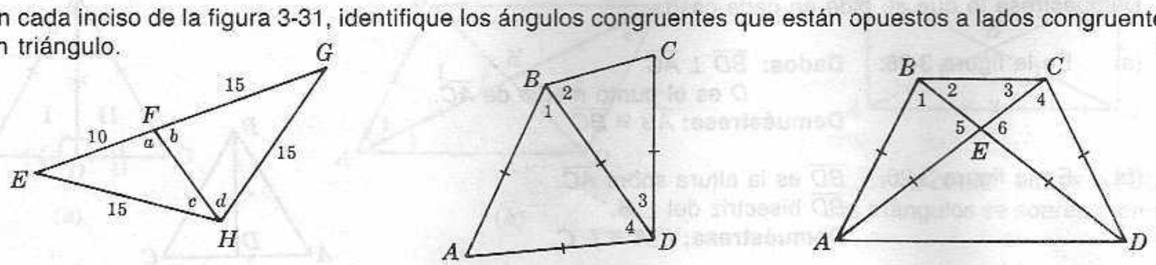
(*b*) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan entre sí, entonces sus lados opuestos son congruentes.

(*c*) Si la base y un lado de un triángulo isósceles son congruentes con la base y un lado de otro triángulo isósceles, entonces sus ángulos en el vértice son congruentes.

(*d*) Las líneas trazadas desde un punto sobre la mediatriz de una línea dada, a los puntos terminales de la línea dada son congruentes.

(*e*) Si los catetos de un triángulo rectángulo son congruentes respecto a los catetos de otro, sus hipotenusas son congruentes.

8. En cada inciso de la figura 3-31, identifique los ángulos congruentes que están opuestos a lados congruentes de un triángulo. (3.8)



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 3-30

9. En cada una de las partes de la figura 3-31, identifique los lados congruentes que están opuestos a los ángulos congruentes de un triángulo. (3.9)

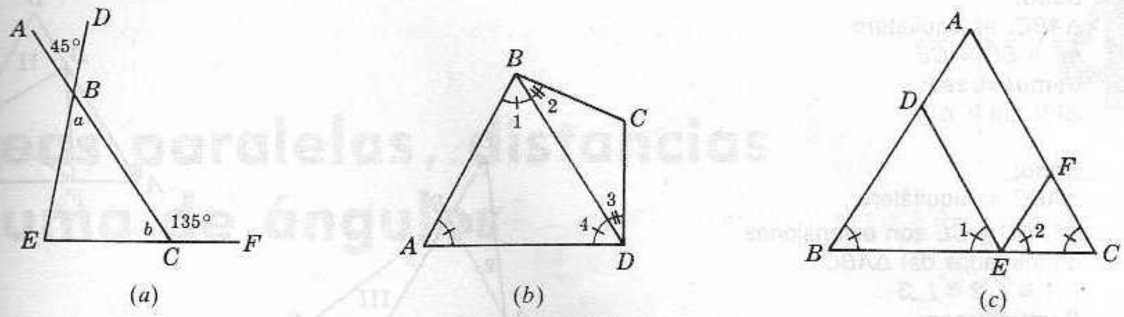
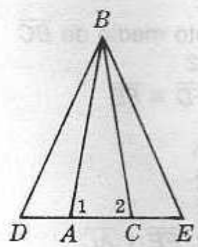


Fig. 3-31

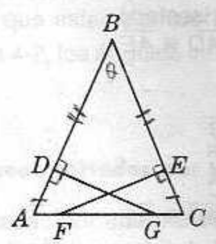
10. En cada una de las secciones de la figura 3-32, deberá probarse que dos triángulos son congruentes. Hágase un diagrama donde se muestren las partes congruentes de ambos triángulos e indíquese la razón de su congruencia. (3.10)

PUC

(a) **Dado:**
$\overline{AD} \cong \overline{CE}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
Demuéstrese:
$\triangle ABD \cong \triangle CBE$



(b) **Dado:**
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overline{DG} \perp \overline{AB}$
$\overline{EF} \perp \overline{BC}$
$\overline{BD} \cong \overline{BE}$
Demuéstrese:
$\triangle AGD \cong \triangle CFE$



(c) **Dado:**
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{AD} \cong \overline{EC}$
Demuéstrese:
$\triangle ABE \cong \triangle BCD$

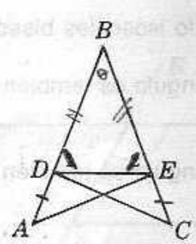


Fig. 3-32

11. En cada sección de la figura 3-33, se puede demostrar que $\triangle$I, $\triangle$II y $\triangle$III son congruentes. Hágase un diagrama donde se muestren las partes congruentes e indíquese la razón de su congruencia. (3.11)

(*a*) **Dado:**
$\triangle ABC$, es equilátero
$\overline{AF} \cong \overline{BD} \cong \overline{CE}$
Demuéstrese:
$\triangle$I $\cong$ $\triangle$II $\cong$ $\triangle$III

(*b*) **Dado:**
$\triangle ABC$ es equilátero
$\overline{AF}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son extensiones de los lados del $\triangle ABC$
$\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$
Demuéstrese:
$\triangle$I $\cong$ $\triangle$II $\cong$ $\triangle$III

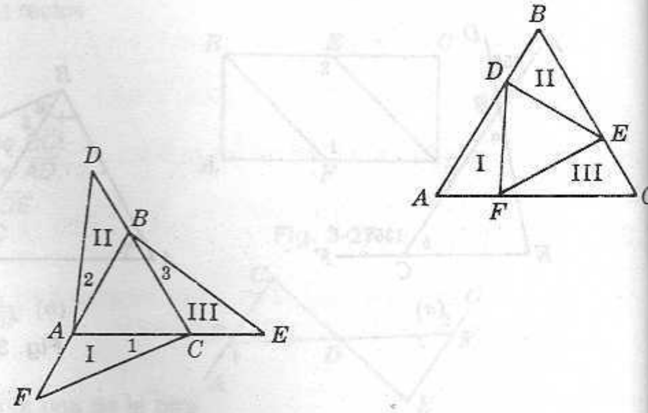


Fig. 3-33

12. Demuéstrense cada uno de los siguientes incisos: (3.12)

(*a*) En la figura 3-34: **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
F es punto medio de $\overline{BC}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
Demuéstrese: $\overline{FD} \cong \overline{FE}$

(*b*) En la figura 3-34: **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{AD} \cong \overline{AE}$
$\overline{FD} \perp \overline{AB}$, $\overline{FE} \perp \overline{AC}$
Demuéstrese: $\overline{BF} \cong \overline{FC}$

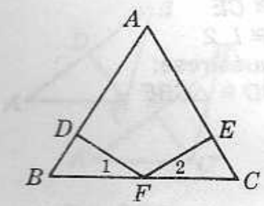


Fig. 3-34

(*c*) En la figura 3-35: **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\angle A$ es trisectado
Demuéstrese: $\overline{AD} \cong \overline{AE}$

(*d*) En la figura 3-35: **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{DB} \cong \overline{BC}$
$\overline{CE} \cong \overline{BC}$
Demuéstrese: $\overline{AD} \cong \overline{AE}$

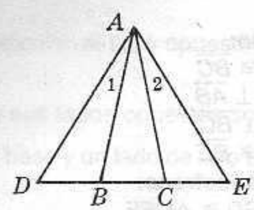


Fig. 3-35

13. Demuéstrense cada uno de los siguientes casos: (3.13)

(*a*) La mediana de la base de un triángulo isósceles bisecta al ángulo del vértice.

(*b*) Si la bisectriz de un ángulo de un triángulo es también la altura del lado opuesto, entonces los otros dos lados del triángulo son congruentes.

(*c*) Si una mediana en un lado de un triángulo es también la altura sobre ese lado, entonces el triángulo es isósceles.

(*d*) En un triángulo isósceles, las medianas de sus lados son congruentes.

(*e*) En un triángulo isósceles, las bisectrices de los ángulos de la base son congruentes.